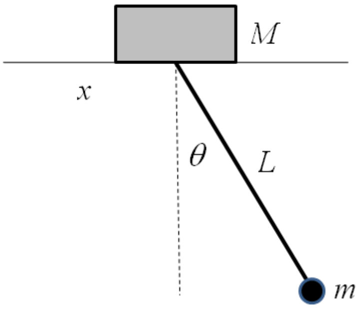
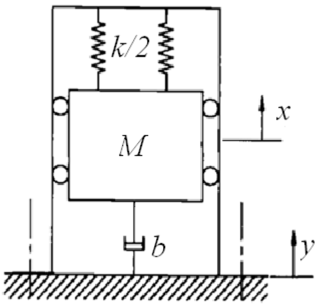
SOAL LATIHAN PEMBINAAN JARAK JAUH IPhO 2017

PEKAN IX

1. <u>Getaran selaras</u>. Pada Gambar di bawah ini, massa M dapat bergerak bebas tanpa gesekan hanya pada bidang horisontal. Massa m terletak di ujung bawah suatu batang tak bermassa dengan panjang L yang tetap. Massa m tersebut dapat berayun bebas karena gravitasi g dengan sudut θ dibentuk oleh batang dan garis vertikal. Ujung atas batang terikat pada massa M.
   a. Tentukan persamaan gerak kedua benda.
   b. Jika θ kecil, tentukan frekuensi osilasi ω untuk m serta posisi x untuk M. Ambil syarat batas saat t = 0, maka $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$, $\theta = \theta_0$ dan $\dot{\theta} = \Omega_0$.



2. <u>Seismometer</u>. Seismometer adalah suatu instrumen untuk mengukur intensitas gempa bumi. Desain seismometer ditunjukkan pada Gambar di bawah ini.



Seismometer bermassa M tergantung vertikal pada dua buah pegas tak bermassa yang masing-masing memiliki tetapan pegas $k/2$, serta terhubung dengan instrumen redaman dengan tetapan [yang berdimensi gaya per kecepatan] positif b. Instrumen redaman tersebut terhubung ke lantai (*ground*). Seismometer tersebut terletak di dalam suatu wadah (*case*) yang kokoh (*rigid*). Asumsikan bahwa pergeseran (*displacement*) untuk M dan lantai berturut-turut adalah x dan y.

a. Tuliskan persamaan gerak untuk M yang menggambarkan dinamika seismometer karena getaran pegas, redaman dan getaran lantai (*ground vibration*).

b. Asumsikan bahwa getaran lantai berupa getaran sinusoidal dengan amplitude Y dan frekuensi sudut ω. Jika solusi getaran yang dicatat oleh seismometer adalah getaran sinusoidal dengan amplitude Z, tuliskan secara eksplisit solusi tersebut disertai dengan nilai Z/Y dinyatakan dalam ω, k, M dan b.

c. Tuliskan frekuensi alamiah (*natural frequency*) ω_n untuk sistem pegas dan massa M serta nilai redaman kritis (*critical damping*) b_n. Tuliskan pula nilai faktor redaman (*damping factor*) yaitu perbandingan antara tetapan redaman dengan redaman kritis.

d. Agar amplitude getaran yang dicatat oleh seismometer bernilai hampir sama dengan amplitude getaran lantai akibat gempa bumi, bagaimanakah sifat massa, tetapan pegas dan nilai tetapan redaman pada seismometer tersebut? Apakah menggunakan massa yang besar atau kecil? Apakah menggunakan pegas dengan tetapan pegas besar atau kecil? Apakah menggunakan redaman dengan tetapan redaman besar atau kecil?

e. Skala Richter didefinisikan sebagai $R = {}^{10}\log(Y/Y_s)$ dengan Y_s adalah amplitude standar gempa bumi sebesar 10^{-6} m. Jika seismometer menunjukkan 7 skala Richter, tentukan amplitude gempa bumi.

3. <u>Gelombang tali pada medium yang kental</u>. Pada seutas tali dengan rapat massa per satuan panjang μ yang memiliki tegangan tali T, terdapat fungsi gelombang $y(x,t)$ yang memenuhi persamaan gaya yang bekerja pada elemen panjang Δx dalam bentuk

$$\Sigma F = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,.$$

Sekarang, dengan berada di dalam suatu medium kental maka terdapat gaya penahan (*drag force*) pada elemen panjang Δx yang sebanding dengan kecepatan transversal, yang besarnya adalah

$$F_{drag} = -\Gamma \frac{\partial y}{\partial t}\Delta x\,.$$

dengan Γ adalah tetapan redaman yang bernilai positif.

a. Tuliskan persamaan gelombang tali yang melibatkan gaya penahan di atas.

b. Dengan mengasumsikan fungsi gelombang tali yang bergetar dengan frekuensi sudut ω adalah $y(x,t) = e^{i\omega t}Y(x)$, carilah bentuk eksplisit $Y(x)$ yang berbentuk fungsi kompleks.

c. Tunjukkan bahwa amplitude fungsi gelombang tersebut terlemahkan (*attenuated*) pada arah *x* dengan adanya faktor $e^{-\kappa x}$. Tentukan nilai $x_a = 1/\kappa$ yang disebut sebagai jarak penetrasi (*penetration distance*) dinyatakan dalam *T*, μ, Γ dan ω, yaitu ketika amplitude gelombang menjadi 1/e mula-mula. Tunjukkan bahwa jika faktor redaman Γ >> $\mu\omega$ maka $x_a = \sqrt{2T/\Gamma\omega}$.

4. <u>Gelombang air pada kanal yang dangkal (*shallow channel*)</u>. Gelombang air (*water wave*) pada kanal yang dangkal dapat dijelaskan melalui persamaan Korteweg-de Vries (KdV). Persamaan KdV adalah persamaan differensial parsial non-linear yang menghasilkan solusi berupa gelombang soliton (*solitary wave*). Persamaan KdV nonlinear untuk fungsi $u(x,t)$ dirumuskan sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Salah satu solusi persamaan di atas adalah berupa gelombang yang menjalar ke sumbu x positif dengan kecepatan *c* yang dirumuskan sebagai

$$u(x,t) = A\ \mathrm{sech}^2(b(x-ct))$$

dengan *A* adalah amplitudo gelombang, *b* suatu tetapan dan bentuk $\mathrm{sech}\, x = 1/\cosh x$ dimana $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$.

a. Apakah solusi gelombang di atas bersifat non-dispersif? Adakah hubungan antara *A* dan *b*?

Persamaan KdV nonlinear di atas dapat dilakukan linearisasi sehingga menjadi persamaan KdV yang terlinearkan (*linearized*). Bentuk persamaan KdV yang terlinearkan untuk fungsi $y(x,t)$ dapat dituliskan menjadi

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha\frac{\partial y}{\partial x} = \beta\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

dengan α dan β adalah suatu tetapan.

b. Solusi untuk persamaan KdV terlinearkan di atas dapat berupa gelombang harmonik kompleks untuk *x* dan *t* yang menjalar ke sumbu x positif dengan amplitude *B*, frekuensi ω dan bilangan gelombang (wavenumber) *k*. Tuliskan solusi tersebut.

c. Dengan menggunakan solusi pada soal (b), tentukan relasi antara ω(k) dan *k*.

d. Gambarkan kurva ω sebagai fungsi *k*.

e. Apakah solusi untuk persamaan KdV terlinearkan berupa gelombang yang dispersif? Mengapa? Jika ya, tentukan selisih antara kecepatan fase (*phase velocity*) dengan kecepatan grup (*group velocity*).

5. <u>Gelombang seismik longitudinal dalam medium viskoelastik</u>**.** Gelombang seismik longitudinal (*longitudinal seismic wave*) dalam medium viskoelastik (*viscoelastic media*) dapat dijelaskan dengan persamaan Nikolaevskiy. Persamaan ini adalah persamaan diferensial parsial nonlinear untuk fungsi $u(x,t)$ yang berbentuk

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\varepsilon-\left(1+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2\right]u+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

dengan ε suatu tetapan yang dinamakan parameter kontrol (*control parameter*) yang dapat bernilai sembarang bilangan riil. Untuk selanjutnya suku nonlinear yaitu $u\,\partial u/\partial x$ akan diabaikan sehingga persamaan Nikolaevskiy di atas menjadi persamaan linear. Solusi untuk $u(x,t)$ pada persamaan di atas adalah berupa gelombang harmonik hanya untuk x (dengan nilai bilangan gelombang k) dikalikan suatu faktor $e^{\sigma t}$ dengan σ suatu bilangan riil yang disebut sebagai laju pertumbuhan (*growth rate*). Faktor ini menunjukkan parameter kestabilan solusi (*stability of the solutions*) akibat adanya suatu gangguan kecil (*perturbation*) . Untuk σ > 0, σ = 0 dan σ < 0, berturut-turut solusinya bersifat tidak stabil (*unstable*), netral (*neutral*) dan stabil (*stable*).

a. Tuliskan bentuk eksplisit $u(x,t)$.

b. Tentukan hubungan antara σ dan *k*.

c. Untuk nilai k ≥ 0, buatlah grafik σ sebagai fungsi k untuk ε di sekitar angka 0, baik untuk ε < 0, ε = 0, maupun ε > 0.

d. Manakah di antara ketiga kemungkinan ε di atas yang menghasilkan solusi yang bersifat tidak stabil? Di sekitar nilai *k* berapakah terdapat solusi tidak stabil tersebut?

e. Untuk *k* = 0, bagaimanakah sifat solusi untuk ketiga kemungkinan ε di atas?

Selamat bekerja