

## SOAL PEMBINAAN JARAK JAUH IPhO 2017 Pekan V

Dosen Penguji : Dr. Rinto Anugraha

### 1. Pulsar, Bintang Netron, Bintang dan Keruntuhan Gravitasi

#### 1A. Pulsar

Pulsar atau Pulsating Radio Sources pertama kali diamati oleh Jocelyn Bell pada tahun 1967. Pertama kali, banyak spekulasi yang berkembang untuk menjelaskan asal mula dari sumber radio yang berdenyut tersebut, tetapi kemudian orang akhirnya dapat mengetahui teori untuk menjelaskannya. Soal-soal di bawah ini berkaitan dengan sejumlah teori untuk menjelaskan pulsar. Beberapa fakta yang merupakan sifat-sifat pulsar adalah

- Sebagian besar pulsar ditemukan memiliki periode antara 0,25 hingga 2 detik, dengan rata-rata periode sebesar sekitar 0,8 detik.
- Pulsar memiliki periode pulsa yang sangat baik sehingga dapat digunakan untuk menguji akurasi jam atom
- Periode seluruh pulsar bertambah secara gradual sepanjang waktu

Beberapa nilai tetapan yang dapat digunakan adalah

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

$$\text{Massa matahari} = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{Jari-jari matahari} = 7 \times 10^8 \text{ m}$$

$$\text{Massa bintang netron} = 1,4 \times \text{massa matahari}$$

$$\text{Jari-jari bintang netron} = 12 \text{ km}$$

- a. Anggap bahwa model untuk pulsar berupa dua bintang seperti matahari yang saling mengorbit satu sama lain. Jika periode orbital dua bintang tersebut diambil sebagai rata-rata periode pulsar, tentukan rata-rata jarak antara keduanya. Apakah hasil ini menunjukkan model yang dapat diterima untuk pulsar?
- b. Model berikutnya adalah pasangan bintang netron yang saling mengorbit satu sama lain. Jika periode orbital dua bintang netron diambil sebagai rata-rata periode pulsar, tentukan rata-rata jarak antara keduanya. Apakah model ini, tanpa memperhitungkan faktor lainnya bisa diterima sebagai model untuk pulsar?

- c. Model lainnya yang mungkin adalah bintang yang mengirimkan sinyal denyut. Perkirakan periode sinyal denyut bintang neutron dengan asumsi memiliki rapat massa yang tetap, dimana modelnya dapat didekati dengan waktu jatuh bebas dari ketinggian yang sama dengan jari-jari bintang neutron. Apakah model ini bisa diterima?
- d. Model lainnya adalah bintang neutron yang berotasi pada sumbunya dengan sangat cepat. Untuk bintang neutron dengan jari-jari  $R$  (abaikan penggelembungan jari-jari bintang neutron pada daerah ekuatornya), tentukan periode minimum rotasi bintang neutron. Apakah model ini bisa diterima?

### 1B. Model untuk Bintang

Ditinjau sebuah model bintang bermassa total  $M$  berbentuk bola berjari-jari  $R$  dengan rapat massa radial  $\rho(r) = \rho_c(1 - r/R)$ , dimana  $\rho_c = \rho(r=0)$  adalah rapat di pusat bintang. Asumsikan bahwa di permukaan bintang ( $r = R$ ), tekanan permukaan  $P$  dan suhu permukaan bintang  $T$  sama dengan nol:  $P(r = R) = T(r = R) = 0$ .

- e. Tentukan rapat massa pusat bintang.
- f. Gunakan persamaan keseimbangan hidrostatis dan syarat batas untuk menentukan tekanan bintang  $P(r)$  dalam bentuk  $P_c \times$  fungsi  $(r/R)$ . Tentukan nilai  $P_c$  secara numerik untuk dengan menggunakan data massa dan jari-jari matahari.
- g. Bintang dapat berisi campuran hidrogen dan helium. Berat atomik rata-rata (*mean atomik weight*) tiap partikel  $\mu$  (mencakup ion bermuatan, proton dan elektron) untuk gas terionisasi seluruhnya yang terdiri dari  $X$  bagian hidrogen dan  $Y$  bagian helium (dimana  $X + Y = 1$ ) diberikan oleh  $\mu = (2X + 3Y/4)^{-1}$ . Tunjukkan relasi tersebut di atas.
- h. Tentukan temperatur di pusat bintang dengan mengasumsikan gas bersifat gas ideal dengan komposisi 70% hidrogen dan 30% helium. Diketahui tetapan Boltzmann  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K dan satuan massa atom adalah  $1,66 \times 10^{-27}$  kg. Bandingkan nilainya dengan temperatur pusat matahari sekitar 15 juta K.
- i. Ulangi kasus (g) untuk bintang helium murni. Apakah suhu pusat bintang lebih tinggi atau lebih rendah dibandingkan dengan (g)?

- j. Bintang yang sesungguhnya lebih terkonsentrasi di pusatnya daripada model bintang ini. Perkirakan, apakah suhu di pusat bintang yang sesungguhnya lebih tinggi atau lebih rendah daripada suhu di pusat model bintang ini? Dan bagaimanakah dengan tekanan di pusat bintang?

### 1C. Kriteria untuk keruntuhan gravitasi

Kriteria klasik untuk keruntuhan gravitasi (*gravitational collapse*) yang dirumuskan oleh Sir James Jean menjelaskan keruntuhan awan gas antar bintang (*interstellar gas cloud*). Jika massa suatu awan gas antar bintang melebihi  $M_J$  maka akan berpeluang untuk mengakibatkan terjadinya keruntuhan gravitasi. Disini, kita akan menurunkan besarnya  $M_J$ , baik dengan analisis dimensi, maupun dengan penurunan sederhana.

- k. Besarnya massa  $M_J$  dapat dinyatakan sebagai  $M_J = k^{\alpha} T^{\beta} G^{\gamma} n^{\delta} m^{\epsilon}$  dimana  $k =$  tetapan Boltzmann,  $T =$  suhu medium gas,  $n =$  rapat jumlah partikel dalam medium per satuan volume dan  $m =$  massa rata-rata partikel yang mengisi medium. Tentukan nilai pangkat di atas.

Jika misalnya tidak dapat menghasilkan nilai yang unik, gunakan bentuk  $M_J = (kT / G)^{\gamma} n^{\delta} m^{\epsilon}$ .

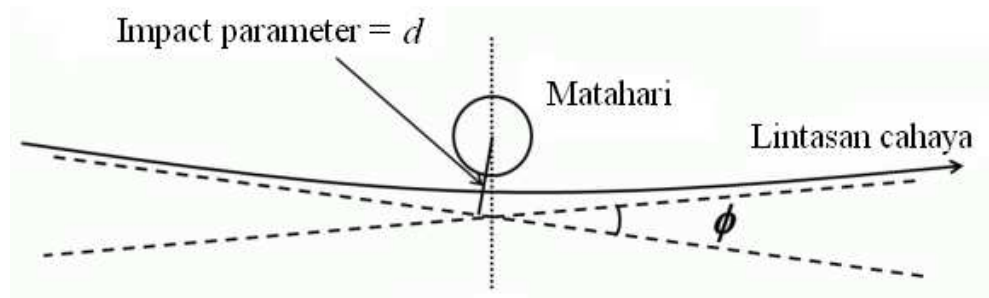
- l. Estimasi massa Jean dapat diturunkan sebagai berikut. Materi dengan panjang karakteristik  $L$  dan massa karakteristik  $M = nmL^3$  akan mengalami keruntuhan gravitasi, jika tekanan internal  $P = nkT$  tidak dapat menahan tekanan yang diberikan oleh berat kolom dengan panjang sisi  $L$ . Tentukan massa Jean dengan membandingkan antara tekanan internal dengan tekanan yang diberikan oleh berat dari kolom dengan panjang sisi  $L$ .

## 2. Pembelokan cahaya bintang oleh medan gravitasi matahari

Ditinjau gerakan suatu partikel bermassa  $m$  yang berada di bawah pengaruh medan gravitasi Newtonian yang ditimbulkan oleh benda bermassa  $M$ . Partikel tersebut bergerak dalam bidang dua dimensi dengan koordinat kutub  $(r, \theta)$  dimana hubungan antara koordinat kutub tersebut dengan koordinat Cartesian  $(x, y)$  dirumuskan sebagai  $x = r \cos \theta$  dan  $y = r \sin \theta$ .

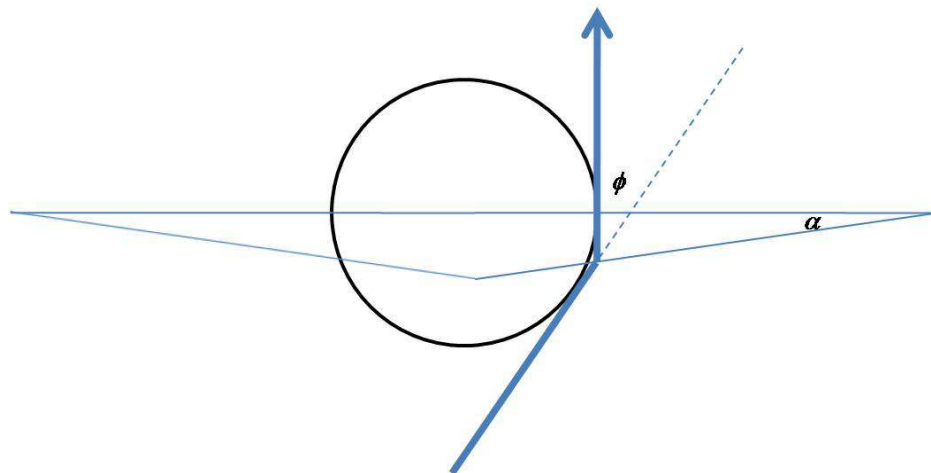
- a. Tuliskan perumusan energi total  $E$  dan momentum sudut  $L$  untuk partikel tersebut dinyatakan dalam koordinat kutub.
- b. Tuliskan bentuk  $dr/dt$  dan  $d\theta/dt$  dinyatakan dengan  $E$  dan  $L$  di atas.
- c. Dengan menggunakan substitusi  $u = 1/r$ , tuliskan bentuk  $du/d\theta$  secara eksplisit dinyatakan dalam besaran-besaran  $E, L, m, k$  dan  $u$ .
- d. Jika digunakan fungsi coba yang berbentuk  $u = A + B \cos \theta$  dengan  $A$  dan  $B$  suatu tetapan positif, tentukan nilai  $A$  dan  $B$ .
- e. Akan ditinjau pembelokan cahaya bintang oleh medan gravitasi matahari yang dapat diamati ketika terjadi gerhana matahari total (*total solar eclipse*). Cahaya bintang dari tempat yang sangat jauh ketika melewati di dekat permukaan matahari (yang massanya besar) akan dibelokkan dengan sudut pembelokan sebesar  $\phi$  yang tak berdimensi. Asumsikan bahwa sudut  $\phi$  sangat kecil dan dinyatakan dalam besaran tetapan gravitasi universal  $G$ , massa matahari  $M_S$ , jari-jari matahari  $R_S$  dan laju cahaya  $c$ . Gunakan analisis dimensi untuk menentukan masing-masing pangkat  $\alpha, \beta$  dan  $\gamma$ , jika sudut  $\phi$  dapat dinyatakan dalam bentuk  $\phi = KGM_S^\alpha R_S^\beta c^\gamma$  dengan  $K$  suatu tetapan tak berdimensi. Selanjutnya konfirmasi kebenaran jawaban anda dengan memasukkan orde besaran di atas secara numerik dalam satuan SI, yaitu  $G \sim 10^{-11}$ ,  $M_S \sim 10^{30}$ ,  $R_S \sim 10^8$  dan  $c \sim 10^8$ .
- f. Selanjutnya akan ditentukan besarnya sudut pembelokan cahaya bintang secara klasik. Lihat Gambar 1. Cahaya bintang dapat dianggap memiliki "massa" sebesar  $m$  yang bergerak dengan laju  $c$ . Tentukan nilai  $K$  dari soal (e) pada besar sudut pembelokan cahaya bintang. Sebagai perbandingan,

teori relativitas umum meramalkan nilai  $K$  yang sama dengan dua kali hasil yang diperoleh disini.



Gambar 1

- g. Fenomena ini dapat memiliki analogi dalam bentuk lensa gravitasi (*gravitational lense*) yang memiliki indeks bias  $n$ . Sinar datang dari bintang dibiaskan ketika memasuki sisi depan lensa gravitasi, kemudian keluar dari lensa tersebut melalui sisi kedua secara tegak lurus, sehingga sudut pembelokan cahaya bintang sama dengan sudut datang dikurangi sudut bias. Lihat Gambar 2. Dua permukaan lensa gravitasi tersebut membentuk sudut  $\alpha$ . Tentukan hubungan antara  $\alpha$ ,  $\phi$  dan indeks bias  $n$ .



### 3. Pendaratan di planet dan gerak roket

Bagian 1. Pendaratan pesawat di planet. Ide topik ini berasal dari Prof. Paul Withers (Boston University) yang menulis paper di *American Journal of Physics* yang berjudul “*Landing spacecraft on Mars and other planets: An opportunity to apply introductory physics*”

Sebuah pesawat ruang angkasa bermassa  $m$  (yang diasumsikan berbentuk silinder) yang memiliki luas penampang  $A$  bergerak dari angkasa luar dengan kecepatan  $v$  memasuki atmosfer planet Mars yang memiliki rapat massa  $\rho$ .

- a. Untuk selang waktu  $\Delta t$ , tentukan massa udara atmosfer yang ditembus oleh pesawat tersebut.
- b. Asumsikan bahwa udara yang ditembus ini dipercepat agar memiliki kecepatan yang sama seperti dengan kecepatan pesawat. Kemudian, menurut hukum konsevasi momentum, momentum yang hilang dari pesawat diubah seluruhnya menjadi momentum yang diterima oleh atmosfer. Dengan mengabaikan efek gravitasi pada pesawat (saat memasuki atmosfer), tuliskan persamaan gerak yang bekerja pada pesawat. Persamaan ini disebut sebagai *drag equation*.
- c. Tuliskan persamaan yang menghubungkan  $p(z) =$  tekanan atmosfer pada ketinggian vertikal  $z$  dari permukaan planet,  $p(z + dz) =$  tekanan atmosfer pada ketinggian  $z + dz$ , rapat massa atmosfer dan percepatan gravitasi planet  $g$ . Jika diasumsikan atmosfer berupa gas ideal isothermal, tunjukkan bahwa

$$\rho = \rho_s \exp(-z / H)$$

dimana  $\rho_s$  adalah rapat massa atmosfer di permukaan planet, dan  $H$  adalah skala ketinggian atmosfer.

- d. Pesawat tersebut bergerak turun ke permukaan planet dengan membentuk sudut  $\phi$  terhadap vertikal. Tuliskan persamaan untuk  $dv/dt$  dan  $dz/dt$ . Selanjutnya, jika kecepatan pesawat saat memasuki puncak atmosfer =  $v_0$ , dan rapat massa puncak atmosfer dapat diabaikan, tentukan kecepatan pesawat pada ketinggian  $z$ .
- e. Untuk pendaratan pesawat yang bernama Curiosity di planet Mars, ambillah nilai luas tampang lintang pesawat  $A = 16 \text{ m}^2$ , massa pesawat  $m = 2400 \text{ kg}$ ,

tekanan atmosfer di permukaan planet Mars  $p_s = 10^3$  Pa, percepatan gravitasi di permukaan planet Mars  $g = 3,7$  m/s. Jika sudut pesawat dengan garis vertikal sejak memasuki atmosfer Mars adalah  $\phi = 60^\circ$ , dan kecepatan pesawat saat memasuki atmosfer adalah  $v_0 = 6$  km/s, tentukan kecepatan pesawat saat mendarat di permukaan Mars. Apakah besar kecepatan tersebut dapat menunjukkan pendaratan yang aman atau tidak?

- f. Untuk dapat meminimalkan kecepatan pesawat saat mendarat:
1. Tampang lintang pesawat  $A$  diperbesar atau diperkecil?
  2. Massa pesawat  $m$  diperbesar atau diperkecil?
  3. Sudut pesawat  $\phi$  saat bergerak turun terhadap vertikal diperbesar atau diperkecil?
- g. Uraian di atas, barulah meninjau pendaratan pesawat tanpa menggunakan parasut, serta mengabaikan gravitasi. Selanjutnya akan dikaji pendaratan menggunakan parasut dengan luas penampang  $A_p > A$  dan memasukkan faktor gravitasi planet ke dalam persamaan gerak. Tuliskan persamaan gerak untuk  $dv/dt$ .
- h. Tentukan besar kecepatan terminal Curiosity, jika luas penampang parasut adalah  $A_p = 200$  m<sup>2</sup> dan skala tinggi atmosfer Mars adalah  $H = 11$  km. Anggap massa parasut dapat diabaikan dibandingkan dengan massa pesawat. Apakah besar kecepatan terminal tersebut masih aman ataukah tidak?
- i. Untuk membuat kecepatan pendaratan sama dengan nol, digunakan *retrorocket* (*retrograde rocket*) yaitu mesin roket yang menghasilkan dorongan (*thrust*) yang berlawanan dengan arah gerak roket sehingga roket akan diperlambat. Impuls yang dihasilkan oleh retrorocket adalah  $m_f I_{sp}$ , dimana  $m_f$  adalah massa bahan bakar yang akan dikonsumsi pada retrorocket tersebut dan  $I_{sp}$  adalah *specific impulse* retrorocket tersebut. Untuk bahan bakar hydrazine (N<sub>2</sub>H<sub>4</sub>), besarnya  $I_{sp}$  adalah sekitar 2000 m/s. Ketika pesawat yang menggunakan parasut dan suatu saat turun dengan kecepatan terminal, kemudian mesin retrorocket dinyalakan. Tentukan besar fraksi massa bahan bakar hydrazine dibandingkan dengan massa pesawat, agar akhirnya kecepatan pesawat saat mendarat sama dengan nol.

Bagian 2. Fisika Roket. Ditinjau sebuah roket yang memiliki massa awal  $m_0$ . Roket tersebut bergerak dengan memancarkan bahan bakar gas, dimana kecepatan buang gas adalah  $v_e$  relatif terhadap roket. Hambatan udara dapat diabaikan.

- j. Anggap gravitasi sementara diabaikan dahulu. Jika massa akhir roket adalah  $m_f$ , tentukan kecepatan akhir roket. Persamaan roket ini dikenal sebagai persamaan roket Tsiolkovsky.
- k. Selanjutnya dengan memperhitungkan gravitasi (percepatan gravitasi  $g$  dianggap konstan) serta gerakan roket adalah ke arah vertikal (melawan gravitasi), tentukan kecepatan akhir saat massa akhir roket adalah  $m_f$ .
- l. Untuk pertanyaan (k) di atas, didefinisikan  $\mu = m_0 / m_f$ ,  $v_e = gI_{sp}$  dimana  $I_{sp}$  adalah specific impulse, serta

$$\text{thrust to weight ratio} = \psi = \frac{F_{thrust}}{m_0 g}.$$

dimana  $F_{thrust} = v_e \dot{m} = v_e (dm / dt)$ . Tentukan waktu yang dibutuhkan roket hingga bahan bakar habis dinyatakan dalam  $\mu$ ,  $I_{sp}$  dan  $\psi$ .

- m. Tentukan tinggi roket saat bahan bakar habis, serta tinggi maksimum roket.