Jawaban

1. Diketahui

$$F(\lambda)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T)-1}$$

a. Untuk menemukan nilai maksimum $F(\lambda)$, diambil derivatif $F(\lambda)$ ke λ kemudian nilanya sama dengan 0. Misalnya

$$x=\frac{hc}{\lambda kT} \text{ atau } \frac{1}{\lambda}=\frac{xkT}{hc}$$

Sehingga

$$F(\lambda)=\left(\frac{xkT}{hc}\right)^5\frac{2\pi hc^2}{\exp(x)-1}=K\frac{x^5}{\exp(x)-1}$$

Dengan

$$K=\frac{2\pi k^5T^5}{h^4c^3}$$

Maka

$$0=\frac{dF}{d\lambda}=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\lambda}=K\frac{5x^4(e^x-1)-x^5e^x}{(e^x-1)^2}.-\frac{hc}{\lambda^2kT}$$

$$5x^4(e^x-1)-x^5e^x=0$$

$$5-x=5e^{-x}$$

Hasilnya adalah

$$x=0 \text{ atau } x=4,965$$

Nilai yang digunakan adalah nilai yang tidak nol.

$$x=\frac{hc}{\lambda kT}=4,965$$

atau

$$\lambda T=\frac{hc}{4,965k}=\frac{6,6\times10^{-34}\times3\times10^{8}}{4,965\times1,38\times10^{-23}}=2,9\times10^{-3}\,\text{mK}$$

b. Total daya radiasi adalah

$$D = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} d\lambda$$

Dengan substitusi

$$\lambda = \frac{hc}{kT} \frac{1}{x}$$

maka

$$d\lambda = -\frac{hc}{kT} \frac{dx}{x^2}, \; \lambda = 0 \to x = \infty, \; \lambda = \infty \to x = 0$$

sehingga

$$D = \int_{x=\infty}^{0} 2\pi hc^2 \left(\frac{kTx}{hc} \right)^5 \frac{1}{e^x - 1} . - \frac{hc}{kT} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$= \frac{2\pi k^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4$$

dengan

$$\sigma = \frac{2\pi k^4}{15 h^3 c^2}.$$

Berarti

$$n = 4$$

c. Rapat energi internal radiasi benda hitam diberikan oleh

$$u = kT^4$$

sehingga energi internal diberikan oleh

$$U = uV = kVT^4$$

Kapasitas panas radiasi pada volume tetap dirumuskan sebagai

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4kVT^3.$$

Tekanan radiasi benda hitam diberikan oleh

$$p = \tfrac{1}{3} u = \tfrac{1}{3} kT^4$$

Kapasitas panas pada tekanan tetap dirumuskan sebagai

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P .$$

Ketika tekanan p tetap maka suhu T juga tetap sehingga $dT = 0$. Jadi

$$C_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P \to \infty .$$

d. Hukum pertama termodinamika dirumuskan sebagai

$$dQ = dU + pdV$$

$$\begin{aligned} dQ &= d(kVT^4) + \tfrac{1}{3}kT^4 dV = k(T^4 dV + 4VT^3 dT) + \tfrac{1}{3}kT^4 dV \\ &= \tfrac{4}{3}kT^4 dV + 4kVT^3 dT \\ &= \tfrac{4}{3}kVT^4\left(\frac{dV}{V} + 3\frac{dT}{T}\right) \end{aligned}$$

Syarat keadaan adiabatik adalah

$$dQ = 0$$

sehingga

$$\frac{dV}{V} + 3\frac{dT}{T} = 0 .$$

Jika diintegralkan diperoleh

$$\ln V + 3\ln T = \text{konstan}$$

atau

$$VT^3 = \text{konstan.}$$

Dengan menggunakan persamaan

$$p = \tfrac{1}{3}kT^4$$

maka

$$pV^{4/3} = \text{konstan.}$$

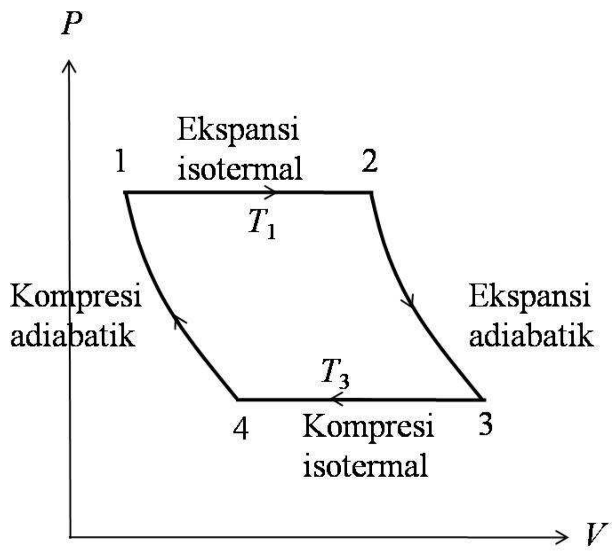
Jika p, V dan T digabungkan maka diperoleh

$$\frac{pV}{T} = \text{konstan}$$

sehingga

$$m = 1.$$

e. Gambar siklus Carnot adalah sebagai berikut.



Pada siklus di atas, keadaan isotermal baik ekspansi maupun kompresi diberikan oleh persamaan p = konstan, sebab

$$p = \tfrac{1}{3} kT^4 .$$

Sedangkan untuk keadaan adibatik baik ekspansi maupun kompresi diberikan oleh

$$p = \frac{\text{konstan}}{V^{4/3}} .$$

f. Dari keadaan 1 ke 2 (isotermal, $dT = 0$), panas yang diterima oleh sistem adalah

$$Q_{1\to 2} = \int dQ = \int_{V_1}^{V_2} \tfrac{4}{3} kT_1^4 dV = \tfrac{4}{3} kT_1^4 \int_{V_1}^{V_2} dV = \tfrac{4}{3} kT_1^4 (V_2 - V_1) .$$

Nilai $Q_{1\to 2} < 0$ karena $V_2 > V_1$.

Dari keadaan 2 ke 3 (adiabatik) maka panas yang diterima oleh sistem adalah

$$Q_{2\to 3} = 0 .$$

Dari keadaan 3 ke 4 (isotermal, $dT = 0$), panas yang diterima oleh sistem adalah

$$Q_{3\to 4} = \tfrac{4}{3} kT_3^4 (V_4 - V_3) .$$

Nilai $Q_{3\to 4} < 0$ karena $V_4 < V_3$.

Dari keadaan 4 ke 1 (adiabatik) maka panas yang diterima oleh sistem adalah

$$Q_{4\to 1} = 0\,.$$

Pada keadaan adibatik berlaku

$$V_2 T_1^3 = V_3 T_3^3 \text{ (adiabatik 2 – 3)}$$

dan

$$V_1 T_1^3 = V_4 T_3^3 \text{ (adiabatik 4 – 1)}$$

Jika dikurangi diperoleh

$$(V_2 - V_1)T_1^3 = (V_3 - V_4)T_3^3 = -(V_4 - V_3)T_3^3$$

Efisiensi mesin Carnot dirumuskan sebagai

$$\eta = \frac{Q_{1\to 2} + Q_{3\to 4}}{Q_{1\to 2}} = 1 + \frac{Q_{3\to 4}}{Q_{1\to 2}} = 1 + \frac{\frac{4}{3}kT_3^3(V_4 - V_3)}{\frac{4}{3}kT_1^3(V_2 - V_1)}\frac{T_3}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_1}\,.$$

g. Persamaan untuk entropi *S* adalah

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{\frac{4}{3}kT^4 dV + 4kVT^3 dT}{T} = \frac{4}{3}kT^3 dV + 4kVT^2 dT$$
$$= d(\tfrac{4}{3}kVT^3)$$

Jadi

$$S = \tfrac{4}{3}kVT^3 + C$$

Jika diasumsikan bahwa untuk $T = 0$ tidak ada entropi ($S = 0$), maka $C = 0$. Jadi rapat entropi dirumuskan sebagai

$$s = \frac{S}{V} = \tfrac{4}{3}kT^3\,.$$

2. Diketahui

$$F = -NkT \ln[2\cosh(\mu_B H / 2kT)]$$

a. Dari persamaan

$$dF = -SdT - MdH$$

maka magnetisasi *M* dirumuskan sebagai

$$\begin{aligned} M &= -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_T \\ &= NkT \frac{\mu_B}{2kT} \frac{2\sinh(\mu_B H / 2kT)}{2\cosh(\mu_B H / 2kT)} \\ &= \tfrac{1}{2} N\mu_B \tanh(\mu_B H / 2kT) \end{aligned}$$

b. Nilai maksimum *M* diperoleh ketika

$$\tanh(\mu_B H / 2kT) \to 1$$

Jadi

$$M_{\max} = \tfrac{1}{2} N\mu_B \, .$$

c. Pada kasus suhu tinggi, (*T* tinggi sehingga $\mu_B H / kT << 1$ maka

$$\begin{aligned} M &= \tfrac{1}{2} N\mu_B \frac{\exp(\mu_B H / 2kT) - \exp(-\mu_B H / 2kT)}{\exp(\mu_B H / 2kT) + \exp(-\mu_B H / 2kT)} \\ &\approx \tfrac{1}{2} N\mu_B \frac{1 + \mu_B H / 2kT - (1 - \mu_B H / 2kT)}{1 + \mu_B H / 2kT + (1 - \mu_B H / 2kT)} \\ &= \tfrac{1}{2} N\mu_B \frac{2\mu_B H / 2kT}{2} \\ &= \frac{N\mu_B{}^2}{4kT} H \end{aligned}$$

Dengan menggunakan relasi

$$M = \chi H$$

Maka susceptibilitas magnetic pada suhu tinggi diberikan oleh

$$\chi = \frac{N\mu_B{}^2}{4kT} \, .$$

d. Dari persamaan

$$dF = -SdT - MdH$$

maka

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_H \\ &= Nk\left[\ln 2\cosh(\mu_B H / kT) + T . - \frac{\mu_B H}{2kT^2}\frac{2\sinh(\mu_B H / kT)}{2\cosh(\mu_B H / kT)}\right] \\ &= Nk\left[\ln(2\cosh(\mu_B H / kT)) - \frac{\mu_B H}{2kT}\tanh(\mu_B H / kT)\right] \end{aligned}$$

e. Untuk limit $H \rightarrow 0$ maka

$$\cosh(\mu_B H / kT) \rightarrow 1$$

dan

$$\tanh(\mu_B H / kT) \rightarrow \mu_B H / kT .$$

Jadi

$$\begin{aligned} S &\approx Nk\left[\ln(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_B H}{kT}\right)^2\right]. \\ &\approx Nk\ln(2) \end{aligned}$$

Dari sini diperoleh jumlah derajat kebebasan sebesar 2, yaitu spin dapat memiliki keadaan ke atas atau ke bawah.

f. Ada dua energi, yaitu

$E_1 = -s\mu_B H = -\frac{1}{2}\mu_B H$ ketika spin searah dengan H

dan

$E_2 = +s\mu_B H = \frac{1}{2}\mu_B H$ ketika spin berlawanan arah dengan H.

Momen magnetik rata-rata dirumuskan sebagai

$$
\begin{aligned}
\langle \mu \rangle &= \frac{\mu_1 e^{-E_1/kT} + \mu_2 e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT} + e^{-E_2/kT}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\mu_B \exp(\frac{1}{2}\mu_B H/kT) + (-\frac{1}{2}\mu_B)\exp(-\frac{1}{2}\mu_B H/kT)}{\exp(\frac{1}{2}\mu_B H/kT) + \exp(-\frac{1}{2}\mu_B H/kT)} \\
&= \frac{\mu_B}{2}\frac{2\sinh(\frac{1}{2}\mu_B H/kT)}{2\cosh(\frac{1}{2}\mu_B H/kT)} \\
&= \tfrac{1}{2}\mu_B \tanh(\tfrac{1}{2}\mu_B H/kT)
\end{aligned}
$$

g. Magnetisasi total N spin dirumuskan sebagai

$$
\begin{aligned}
M &= N\langle \mu \rangle \\
&= \tfrac{1}{2} N\mu_B \tanh(\tfrac{1}{2}\mu_B H/kT)
\end{aligned}
$$

Hasil ini sama seperti pada (a).

3. Persamaan keadaan Dieterici

$$p = \frac{nRT}{V - nb}\exp\left(-\frac{na}{RTV}\right)$$

dengan p = tekanan, V = volume, T = suhu mutlak, n = jumlah mol, R = tetapan gas universal serta a dan b = tetapan positif.

a. Keadaan kritis dipenuhi ketika tekanan P, volume V dan suhu T gas tersebut memenuhi tiga persamaan:

Persamaan keadaan, $(\partial p/\partial V)_T = 0$ dan $(\partial^2 p/\partial V^2)_T = 0$.

$$(\partial p/\partial V)_T = nRT\left[-(V-nb)^{-2} e^{-\frac{na}{RTV}} + (V-nb)^{-1}\frac{na}{RTV^2} e^{-\frac{na}{RTV}}\right]$$

$$= p\left(\frac{na}{RTV^2} - \frac{1}{V-nb}\right)$$

$$(\partial^2 p/\partial V^2)_T = p\left[\left(\frac{na}{RTV^2} - \frac{1}{V-nb}\right)^2 + \frac{1}{(V-nb)^2} - \frac{2na}{RTV^3}\right].$$

Dari persamaan $(\partial p/\partial V)_T = 0$ diperoleh

$$\frac{na}{RT_cV_c^2} = \frac{1}{V_c - nb}$$

Dari persamaan $(\partial^2 p/\partial V^2)_T = 0$ diperoleh

$$\frac{1}{(V_c - nb)^2} = \frac{2na}{RT_cV_c^3}$$

Dari dua persamaan terakhir di atas dengan substitusi diperoleh volume kritis

$$V_c = 2nb.$$

Nilai suhu kritis T_c diperoleh dari persamaan di atas yaitu

$$T_c = \frac{na(V_c - nb)}{RV_c^2}$$

$$= \frac{a}{4Rb}$$

Sedangkan tekanan kritis diperoleh dari persamaan keadaan

$$p_c = \frac{nRT_c}{V_c - nb}\exp\left(-\frac{na}{RT_cV_c}\right).$$
$$= \frac{a}{4b^2e^2}$$

b. Digunakan lambang tekanan tereduksi $\overline{p} = p / p_c$, volume tereduksi $\overline{V} = V / V_c$ dan suhu tereduksi $\overline{T} = T / T_c$.

Persamaan keadaan menjadi

$$\frac{a\overline{p}}{4b^2e^2} = \frac{nR(a/4Rb)\overline{T}}{2nb\overline{V} - nb}\exp\left(-\frac{na}{R(a/4Rb)\overline{T}.2nb\overline{V}}\right)$$

yang jika disederhanakan menjadi

$$\overline{p} = \frac{e^2\overline{T}}{2\overline{V} - 1}\exp\left(-\frac{2}{\overline{T}\overline{V}}\right)$$

c. Titik inversi pada efek Joule-Thomson diperoleh ketika

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_h = 0$$

atau

$$T(\partial V / \partial T)_p - V = 0$$

Berlaku juga

$$\overline{T}(\partial\overline{V} / \partial\overline{T})_{\overline{p}} - \overline{V} = 0$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai

$$(\partial\overline{V} / \partial\overline{T})_{\overline{p}} = \overline{V} / \overline{T}$$

Dari persamaan keadaan tereduksi

$$(2\overline{V} - 1)\overline{p} = e^2\overline{T}\exp\left(-\frac{2}{\overline{T}\overline{V}}\right)$$

jika diturunkan ke $\overline{T}$ pada $\overline{p}$ konstan, hasilnya adalah

$$2(\partial\overline{V} / \partial\overline{T})_{\overline{p}}\,\overline{p} = e^2\exp\left(-\frac{2}{\overline{T}\overline{V}}\right)\left[1 + \overline{T}\left(\frac{2}{(\overline{T}\overline{V})^2}(V + T(\partial\overline{V} / \partial\overline{T})_{\overline{p}})\right)\right]$$

$$\frac{2\bar{p}\bar{V}}{\bar{T}} = e^2 \exp\left(-\frac{2}{\bar{T}\bar{V}}\right)\left[1+\frac{4}{\bar{T}\bar{V}}\right]$$

Jika persamaan terakhir di atas dibagi dengan persamaan keadaan tereduksi untuk mengeliminasi $\bar{p}$, akhirnya diperoleh

$$\bar{V} = \frac{4}{8-\bar{T}}.$$

Jika hasil ini dimasukkan ke dalam persamaan keadaan tereduksi diperoleh

$$\bar{p} = (8-\bar{T})\exp\left(\frac{5}{2}-\frac{4}{\bar{T}}\right).$$